Przestrzenie L_p, $1 \le p < \infty$

Niech (Ω, Σ, μ) przest. z miarą. Niech $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Przypomnijmy, że $x : \Omega \to \mathbb{C} \overset{def}{\iff}$ $Re(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ oraz $Im(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ są całkowalne i wtedy kładziemy

$$\int_\Omega x \, d\mu := \int_\Omega Re\, x \, d\mu + i \int_\Omega Im\, x \, d\mu$$

Dla $1 \le p < \infty$ przestrzeń funkcji całkowalnych w p-tej potędze nad ciałem $\mathbb{F}$, to

$$L_p(\mu) := \left\{ x : \Omega \to \mathbb{F} : \int_\Omega |x|^p d\mu < \infty \right\} \Big/ \overset{p.w.}{=}$$

gdzie

$$x \overset{p.w.}{=} y \iff \mu(\{ t \in \Omega : x(t) \neq y(t) \}) = 0$$

Tw. $L_p(\mu)$ jest przestrzenią Banacha z normą

$$\|x\|_p := \left(\int_\Omega |x|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Uwaga 1:

Nierówność trójkąta, to nierówność Minkowskiego.

Uwaga 2: Dla $p=2$, przestrzeń $L_2(\mu)$ jest prz. Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle x, y\rangle := \int_\Omega x \cdot \bar{y}\, d\mu$$

W szczególności $\|x\|_2 = \left(\int |x|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Natomiast $\langle x, y\rangle$ jest poprawnie określony na mocy

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \qquad (\text{N. Schwarza})$$

Uwaga 3:

Każda (abstrakcyjna) prz. Hilberta H jest izometrycznie izomorficzna z pewną przestrzenią $L_2(\mu)$

Jeśli $\{e_i\}_{i\in I}$ baza ortonormalna H, to

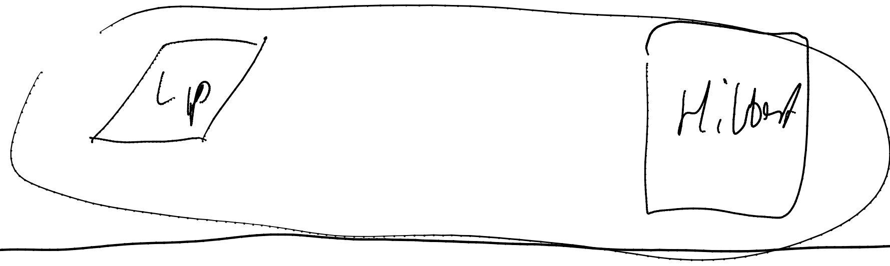
$$H \cong \ell_2(I), \text{ gdzie } x = \sum_{i\in I} x(i) e_i \longmapsto \{x(i)\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$$

$\ell_2(I) = L_2(\mu)$ gdzie μ – miara licząca na I

Idea wykładu = slogan, to

Przestrzenie $L_p(\mu)$ to „przechylone" przestrzenie Hilberta

Przestrzenie $L_p(\mu)$ to „przechylone" przestrzenie Hilberta



Def: Przestrzenią dualną do prz. Banacha X nazywamy przestrzeń Banacha $X^* := B(X, \mathbb{F})$

Elementy $X^* \equiv$ ograniczone funkcjonały liniowe
$$f : X \to \mathbb{F}, \quad \|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

Uwaga: Mamy naturalne odwzorowanie dwuliniowe
$$X \times X^* \ni (x, y^*) \longrightarrow \langle x, y^* \rangle := y^*(x)$$
to odwzorowanie zastępuje iloczyn skalarny.

Tw. (Przestrzenie dualne do L_p)

Niech (Ω, Σ, μ) dow. przestrzeń z miarą oraz $1 < p < +\infty$

$$L_p^*(\mu) \underset{\text{izometrycznie}}{\cong} L_q(\mu) \quad \text{gdzie} \quad \underbrace{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1}_{\text{sprzężenie hölderowskie}} \quad \left(q = \frac{p}{p-1}\right)$$

(izomorfizm)

Dokładniej, $f \in L_p^*(\mu) \iff \exists_{y \in L_q(\mu)} \forall_{x \in L_p(\mu)} f(x) = \int_\Omega x \cdot y \, d\mu$

Ponadto, y jest jednoznacznie wyznaczony przez f

oraz $\|f\| = \|y\|_q$.

Dowód: „$\Leftarrow$" Jeśli $y \in L_q(\mu)$, to z Nierówn. Höldera

$$\forall_{x \in L_p(\mu)} \quad \underbrace{\left|\int_\Omega x \cdot y \, d\mu\right|}_{|f_y(x)|} \le \int_\Omega |xy| \, d\mu \overset{\text{N. Hö}}{\le} \underbrace{\left(\int_\Omega |x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}_{\|x\|_p} \underbrace{\left(\int_\Omega |y|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}}_{\|y\|_q}$$

wynika, że $f_y(x) := \int_\Omega x y \, d\mu$ zadaje funkcjonał

ograniczony $f_y : L_p(\mu) \to \mathbb{F}$ oraz $\|f_y\| \le \|y\|_q$

Stąd

$$\boxed{L_q(\mu) \ni y \longmapsto f_y \in L_p^*(\mu)}$$

liniowa kontrakcja (nie zwiększa normy)

„$\Rightarrow$" Niech teraz $f \in L_p^*(\mu)$, tzn $f : L_p(\mu) \to \mathbb{F}$

$\boxed{\text{Przypadek miary skończonej}}$ Załóżmy, że $\mu(\Omega) < \infty$

Przypadek miary skończonej Załóżmy, że $\mu(\Omega)<\infty$

Wtedy wzór

$$\forall_{A\in\Sigma} \quad \nu(A) := \ell(1\!\!1_A)$$

poprawnie definiuje miarę (znakowaną/zespoloną)

$$\nu : \Sigma \to \mathbb{F}$$

„poprawność określoności" $\Longleftrightarrow$ skończoność miary

$A\in\Sigma \Rightarrow 1\!\!1_A \in L_p(\mu)$, bo $\|1\!\!1_A\|_p = \mu(A)^{\frac{1}{p}} < \infty$

„addytywność" $\Longleftrightarrow$ liniowość ℓ

$$\forall_{\substack{A,B\in\Sigma\\ A\cap B=\emptyset}} \quad \nu(A\sqcup B) = \ell(1\!\!1_{A\sqcup B}) \overset{A\cap B=\emptyset}{=} \ell(1\!\!1_A + 1\!\!1_B)$$

$$\overset{\ell\text{-liniowy}}{=} \ell(1\!\!1_A) + \ell(1\!\!1_B) = \nu(A)+\nu(B)$$

„σ-addytywność" $\Longleftrightarrow$ ciągłość ℓ

Jeśli $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ t. że $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \ldots$ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$,

to $\|1\!\!1_{A_n}\|_p = \mu(A_n)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ciągłość miary } \mu} \mu(\emptyset)=0$

Stąd $1\!\!1_{A_n} \xrightarrow{L_p} 0$, a zatem

Stąd $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{L_p} 0$, a zatem

$$V(A_n) = \ell(\mathbb{1}_{A_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ciągłość } \ell} \ell(0) = 0$$

Czyli V skończenie addytywna i ciągła, więc
σ-addytywna

$$\left(\begin{matrix}\text{skończonej}\\ \text{addytywności}\end{matrix}\right) + \left(\text{ciągłości}\right) \overset{\text{Tw. miary i całki}}{\iff} \left(\sigma\text{-addytywności}\right)$$

Ponadto $V \ll \mu$ (absolutnie ciągła), bo

$$\mu(A) = 0 \iff \mathbb{1}_A = 0 \ \mu\text{-p.w.} \iff \mathbb{1}_A = 0 \text{ w } L_p(\mu)$$

$$\Rightarrow \ell(\mathbb{1}_A) = \ell(0) = 0 \iff V(A) = 0$$

Zatem na mocy Tw. Radona-Nikodyma

$$\underset{y \in L_1(\mu)}{\exists!} \ \underset{A \in \Sigma}{\forall} \ \underbrace{V(A)}_{\ell(\mathbb{1}_A)} = \int_A y \, d\mu \xrightarrow{\text{liniowość } \ell}$$

$$\ell\left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^n a_i \, \ell(\mathbb{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^n a_i \int_{A_i} y \, d\mu =$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i \int_\Omega \mathbb{1}_{A_i} \cdot y \, d\mu = \int_\Omega \left(\sum a_i \mathbb{1}_{A_i}\right) \cdot y \, d\mu$$

$$\dots c_i \int_\Omega \chi_{A_i}\, y \, d\mu = \int_\Omega \Big(\sum c_i \chi_{A_i}\Big) y \, d\mu$$

$$\Rightarrow \forall_{x \text{ - funkcja prosta}} \quad \ell(x) = \int_\Omega x \cdot y \, d\mu \qquad (*)$$

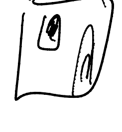
Aby wykazać, że $(*)$ zachodzi dla każdego $x \in L_p(\mu)$ wystarczy pokazać, że

$$\|y\|_q \le \|\ell\| \qquad (\dagger)$$

Wtedy $y \in L_q(\mu)$ i na mocy dowodu „$\Leftarrow$" otrzymujemy, że $\ell_y(x) := \int x y \, d\mu$ jest funkcjonałem z $L_p^*(\mu)$. Wtedy na mocy $(*)$ pokrywa się z $\ell \in L_p^*(\mu)$ na zbiorze gęstym (f. prostych), a stąd

$$\ell = \ell_y .$$

Oraz $\|y\|_q \le \|\ell\| = \|\ell_y\| \le \|y\|_q \Rightarrow \|\ell\| = \|\ell_y\| = \|y\|_q$

Dowód $(\dagger)$: 

Przypadek miary nieskończonej: (Ω, Σ, μ) – dow. prz. z miarą

Niech

$$\mathcal{F} := \{A \in \Sigma : \mu(A) < \infty\}$$

Dla $A \in \mathcal{F}$ trójka

(A, Σ_A, μ_A) gdzie $\Sigma_A = \{B \in \Sigma : B \subseteq A\}$

$$\mu_A = \mu|_{\Sigma_A}$$

jest przestrzenią z miarą skończoną. Ponadto $L_p(\mu_A)$ możemy utożsamić z podprzestrzenią $L_p(\mu)$ składającą się z funkcji znikających poza A

$$L_p(\mu_A) \cong \{x \in L_p(\mu) : x(\Omega \setminus A) = 0\}$$ izometryczny izomorfizm

Na mocy „przypadku skończonego" istnieje $y_A \in L_q(\mu_A)$ t. że

$$\forall_{x \in L_p(\mu_A)} \quad f(x) = \int_A x \cdot y_A \, d\mu \quad \text{oraz} \quad \|y_A\| \le \|f\|$$

Zauważmy, że dla $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ mamy $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$ oraz

$$y_{A_1 \cup A_2}\big|_{A_1} = y_{A_1} \quad (\mu\text{-p.w.})$$

$$y_{A_1 \cup A_2}\big|_{A_2} = y_{A_2} \quad (\mu\text{-p.w})$$

Czyli funkcja $y_{A_1 \cup A_2}$ jest wspólnym przedłużeniem (μ-p.w.) funkcji y_{A_1} i y_{A_2}. Chciałoby się położyć

$$y(t) = \begin{cases} y_A(t), & t \in A \text{ dla pewnego } A \in F \\ 0, & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

ale na ogół pojawia się tu problem z niemierzalnością (μ-p.w.) tak określonego y.